ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

Rappresentazioni Lineari di Gruppi Finiti

Tesi di Laurea in
Geometria Superiore I

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini

Presentata da:
Agnese Baldisserri

Sessione seconda

Anno Accademico
2009/2010

Alla mia famiglia,
ad Andrea
e a tutti coloro che mi vogliono bene.

"A gift of any kind is a considerable responsability.
It is a mistery, something gratuitous and wholly undeserved."
Flannery O'Connor

Introduzione

In questa tesi mi propongo di esporre alcuni fatti fondamentali che riguardano la *teoria delle rappresentazioni lineari di gruppi finiti*. In particolare, mi sono occupata della *teoria del carattere* e di un particolare tipo di rappresentazioni, le *rappresentazioni indotte*.
Questo elaborato consiste di tre capitoli, all'interno dei quali introduco le nozioni necessarie, enuncio e dimostro i risultati più importanti, svolgo alcuni esercizi significativi.

- Nel primo capitolo viene data la definizione di rappresentazione lineare di un gruppo finito e viene dimostrato come, per classificare tali rappresentazioni, sia sufficiente calcolare quelle irriducibili, ovvero quelle rappresentazioni che non lasciano fisso alcun sottospazio dello spazio vettoriale di partenza. Inoltre viene descritta la teoria del carattere, che si dimostra particolarmente utile per calcolare il numero di rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito. Sono poi riportati due esempi particolarmente interessanti perchè ci aiutano a comprendere il significato dei risultati ottenuti e come sia possibile utilizzarli: il gruppo S_4 ed i gruppi ciclici.

- Nel secondo capitolo vengono definite le rappresentazioni indotte: consideriamo il caso in cui esista una rappresentazione lineare di un sottogruppo del gruppo finito di partenza e ci domandiamo se sia possibile ricavare da essa una rappresentazione anche per il gruppo. Il teorema in cui culmina il capitolo è il teorema di esistenza e unicità di tali rappresentazioni indotte.

- Nel terzo capitolo, infine, riportiamo un'ulteriore possibile definizione di rappresentazione indotta, dimostrando l'equivalenza delle due definizioni, e, attraverso una serie di risultati sulle rappresentazioni indotte, arriviamo a dimostrare il *criterio di Mackey*, criterio utile al fine di stabilire se una rappresentazione indotta sia o no irriducibile.

Indice

Capitolo 1

Rappresentazioni di Gruppi Finiti e Teoria del Carattere

1.1 Rappresentazioni di Gruppi Finiti

Lo scopo di questo primo capitolo è quello di introdurre la teoria delle rappresentazioni di gruppi, in particolare gruppi finiti, enunciando le prime definizioni e mostrando i risultati più importanti. La descrizione di alcuni esempi riportati nel corso del capitolo potrà risultare utile per comprendere maggiormente gli argomenti trattati.

1.1.1 Definizione

Definizione 1.1. Dato un gruppo finito G, consideriamo la coppia (ρ, V), dove V è uno spazio vettoriale di dimensione finita n su un campo $\mathbb{K}$, e ρ è un omomorfismo di gruppi da G a $GL(V)$[1], ovvero:

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \rho(g). \end{aligned}$$

La coppia (ρ, V) è detta *rappresentazione* di G.

[1] Con $GL(V)$ indichiamo l'insieme delle matrici invertibili $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$, o, equivalentemente, l'insieme degli isomorfismi lineari da V a V.

Preso $v \in V$, si indica con gv o con $\rho(g)v$ l'elemento $\rho(g)(v)$.
Una volta data una rappresentazione (ρ, V) per G, V viene detto G-modulo, nel senso che possiamo considerare l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi : G \times V &\longrightarrow V \\ (g, v) &\longmapsto \phi(g, v) := \rho(g)(v) \end{aligned}$$

che risulta avere per ogni $v, w \in V$ e per ogni $g, h \in G$ le seguenti proprietà:

- $\phi(g, v + w) = \phi(g, v) + \phi(g, w)$;
- $\phi(gh, v) = \phi(g, \phi(h, v))$;
- $\phi(g, 0) = 0$;
- $\phi(1_G, v) = v$.

La dimensione di V è chiamata *grado di* ρ.

Definizione 1.2. Date due rappresentazioni (ρ, V) e (ρ', V') di G, una mappa fra queste è un'applicazione lineare φ fra V e V' tale che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varphi} & V' \\ \mathrm{g}\downarrow & & \downarrow\mathrm{g} \\ V & \xrightarrow{\varphi} & V' \end{array}$$

per ogni $g \in G$. Una tale applicazione è detta mappa G-lineare.

Possiamo osservare che, data una mappa G-lineare, il suo nucleo, la sua immagine ed il conucleo sono tutti G-moduli, ovvero ereditano da V e V' la struttura di G-modulo.

Ora, data una rappresentazione (ρ, V) di G, potremmo chiederci quali sottospazi di V rimangano invariati sotto l'azione del gruppo G: si tratta delle *sottorappresentazioni*, che sono definite nel modo seguente:

Definizione 1.3. W sottospazio vettoriale di V è detto *sottorappresentazione* di V se vale che per ogni $g \in G$ e per ogni $w \in W$

$$\rho(g)(w) \in W.$$

Una rappresentazione V si dice *irriducibile* se non esiste nessuna sottorappresentazione propria di V non banale.

1.1.2 Primi esempi di rappresentazioni

Dato un gruppo finito G, possiamo studiarne le seguenti rappresentazioni:

- *Rappresentazione BANALE* (ρ, V):
  dato uno spazio vettoriale V, la rappresentazione banale agisce associando l'applicazione identica ad ogni elemento del gruppo, ovvero

  $$\rho(g)(v) = v \quad \forall g \in G,\ \forall v \in V.$$

  È chiaro che in questo caso V è una rappresentazione irriducibile se e solo se ha grado 1.

- *Rappresentazione di PERMUTAZIONE* (δ, W):
  sia X un insieme finito, e supponiamo che G agisca su X a sinistra, ovvero che esista un'applicazione

  $$\begin{aligned} \vartheta : G \times X &\longrightarrow X \\ (\,g\,,\,x\,) &\longmapsto \vartheta(g,x). \end{aligned}$$

  Sia ora W lo spazio vettoriale con base $\{e_x \,/\, x \in X\}$, definiamo δ nel modo seguente:

  $$\begin{aligned} \delta : G &\longrightarrow GL(W) \\ g &\longmapsto \delta(g) : W \longrightarrow W \\ &\qquad\qquad \textstyle\sum a_x e_x \longmapsto \sum a_x e_{\theta(g,x)}. \end{aligned}$$

  Si verifica facilmente che la coppia (δ, W) così definita costituisce una rappresentazione per G.

- Date due rappresentazioni di un gruppo finito G, (ρ, V) e (δ, W), possiamo ricavare altre rappresentazioni per G:

  ⋆ $(\rho \oplus \delta, V \oplus W)$ è una rappresentazione lineare di G;

  ⋆ $(\rho \otimes \delta, V \otimes W)$ definita come:

$$\begin{array}{rccc} (\rho \otimes \delta)(g): & V \otimes W & \longrightarrow & V \otimes W \\ & (v \otimes w) & \longmapsto & (\rho(g)(v) \otimes \delta(g)(w)) \end{array}$$

  è una rappresentazione lineare di G;

  ⋆ possiamo costruire anche una rappresentazione $(\sigma, Hom(V,W))$ nel modo seguente: sia $\varphi \in Hom(V,W)$, definiamo per ogni $v \in V$ e per ogni $g \in G$:

$$[\sigma(g)(\varphi)](v) := \delta(g)(\varphi(\rho(g)^{-1}(v))).$$

  Dobbiamo controllare che si tratti effettivamente di una rappresentazione lineare per G; presi $g, h \in G$ e $v \in V$ abbiamo:

$$\begin{aligned}[\sigma(gh)(\varphi)](v) &= \delta(gh)[\varphi(\rho(gh)^{-1}(v))] = \\ &= \delta(g)\delta(h)[\varphi(\rho(h)^{-1}\rho(g)^{-1}(v))] = \\ &= \delta(g)[(\sigma(h)\varphi)(\rho(g)^{-1}v)] = \\ &= [\sigma(g)\sigma(h)(\varphi)](v).\end{aligned}$$

  Possiamo notare che l'insieme degli omomorfismi da V a W G-lineari, ovvero tali per cui vale

$$f \circ \rho(g) = \delta(g) \circ f \quad \forall g \in G$$

  coincide con l'insieme degli elementi di $Hom(V,W)$ che vengono fissati dall'azione della σ appena definita; infatti per ogni $g \in G$

$$\sigma(g)(\varphi) = \varphi \Longleftrightarrow \delta(g) \circ \varphi \circ \rho(g)^{-1} = \varphi \Longleftrightarrow \delta(g) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(g).$$

⋆ in ultimo consideriamo la rappresentazione (ρ^*, V^*) di G definita in modo tale che valga per ogni $g \in G$, $\psi \in V^*, v \in V$:

$$[\rho^*(g)(\psi)](v) := \psi(\rho(g)^{-1}(v)).$$

In modo analogo a quello utilizzato nel punto precedente si dimostra che la coppia (ρ^*, V^*) è una rappresentazione lineare di G. Osserviamo che questo è un caso particolare della costruzione precedente, in cui $W = \mathbb{K}$ e la rappresentazione su $\mathbb{K}$ è quella banale.

1.1.3 Lemma di Schur e principali conseguenze

D'ora in poi supponiamo

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Prima di iniziare a classificare le rappresentazioni di un gruppo finito G, possiamo analizzare il problema restringendo la nostra ricerca, per esempio limitandoci al caso delle rappresentazioni irriducibili; vediamo come ciò sia possibile:

Proposizione 1.1.1. *Sia (V, ρ) rappresentazione di un gruppo finito G, e sia W una sua sottorappresentazione, allora esiste W' sottorappresentazione di V tale che vale:*

$$V = W \oplus W'.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione, introduciamo su V un prodotto scalare Hermitiano tale che valga per ogni $g \in G$ e per ogni $v, w \in V$:

$$H(gv, gw) = H(v, w);$$

per esempio, dato un qualsiasi prodotto Hermitiano H_0 su V, possiamo definire H nel modo seguente:

$$H(v, w) := \sum_{g \in G} H_0(gv, gw).$$

H risulta essere un prodotto Hermitiano, e d'altra parte vale per ogni elemento $s \in G$:

$$H(sv, sw) = \sum_{g \in G} H_0(g(sv), g(sw)) = \sum_{g \in G} H_0((gs)v, (gs)w) =$$
$$= \sum_{\tilde{g} \in G} H_0(\tilde{g}v, \tilde{g}w) = H(v, w)$$

dove $\tilde{g} = gs$. Ora possiamo definire

$$W^{\perp} := \{v \in V \,/\, H(v, w) = 0 \quad \forall w \in W\},$$

e vale $V = W \oplus W^{\perp}$. L'unica cosa che rimane da dimostrare è che $W^{\perp}$ è una sottorappresentazione di V, ovvero che vale per ogni $g \in G$ e per ogni $v \in W^{\perp}$, $gv \in W^{\perp}$. Questo è vero se e solo se

$$H(gv, w) = 0 \quad \forall\, w \in W :$$

$$H(gv, w) = H(gv, g(g^{-1}w)) = H(v, g^{-1}w) = 0$$

poichè $g^{-1}w \in W$. □

Corollario 1.1.2. *Ogni rappresentazione è isomorfa alla somma diretta di rappresentazioni irriducibili.*

Questa proprietà che hanno i gruppi finiti e anche altri gruppi, tra i quali i gruppi compatti, è detta di *completa riducibilità* e non deve essere considerata valida per ogni gruppo, in quanto, per esempio, il gruppo additivo $\mathbb{R}$ non risulta essere completamente riducibile.
Consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ e $\rho : \mathbb{R} \longrightarrow GL(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al variare di a in G, l'asse x risulta essere fissata, ma non esiste nessun altro sottospazio fisso complementare alla retta orizzontale (si dimostra facilmente calcolando autovalori e rispettivi autospazi).
Il nostro scopo, ora, è quello di dimostrare che questa scomposizione delle rappresentazioni in sottorappresentazioni irriducibili è unica (a meno di isomorfismi). Per farlo enunciamo il seguente lemma:

Lemma 1.1.3. *(Lemma di Schur) Se V e W sono due rappresentazioni irriducibili di G e $\phi : V \longrightarrow W$ è un omomorfismo di G-moduli, allora valgono le seguenti affermazioni:*

1) *o ϕ è un isomorfismo o ϕ è l'applicazione nulla;*

2) *se $V = W$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\phi = \lambda \cdot I$ (dove I é l'identità).*

Dimostrazione. La prima affermazione deriva dal fatto che $Ker(\phi)$ e $Im(\phi)$ sono sottospazi rispettivamente di V e W *invarianti*; infatti supponiamo che $v \in Ker(\phi)$, allora per ogni $g \in G$ vale

$$\phi(gv) = g\phi(v) = 0$$

ovvero $gv \in Ker(\phi)$; lo stesso vale per $Im(\phi)$. Supponiamo ora che ϕ non sia un isomorfismo fra V e W, ovvero che $Ker(\phi) \neq \{0\}$, allora $Ker(\phi)$ risulta essere una sottorappresentazione di V non banale, ed essendo V irriducibile per ipotesi, $Ker(\phi) = V$ (ϕ risulta quindi essere l'applicazione nulla).
Per la seconda affermazione, osserviamo che essendo $\mathbb{C}$ algebricamente chiuso, deve esistere $\lambda \in \mathbb{C}$ autovalore per ϕ tale che

$$\phi - \lambda \cdot I$$

sia un'applicazione con nucleo non banale; per la prima affermazione allora deve essere

$$\phi - \lambda \cdot I = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \lambda \cdot I.$$

□

Questo lemma ci permette di dimostrare il seguente teorema, che risulta fondamentale in quanto semplifica notevolmente il lavoro di classificazione delle rappresentazioni di un gruppo finito:

Teorema 1.1.4. *Dato un gruppo finito G, ogni sua rappresentazione (ρ, V) può essere scritta come somma diretta*

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus ... \oplus V_k^{\oplus a_k},$$

dove per ogni $i = 1, ..., k$, V_i è sottorappresentazione irriducibile di V. Questa decomposizione, detta decomposizione isotipica di V, è unica a meno di isomorfismi.

Dimostrazione. L'esistenza di una tale decomposizione è già stata verificata nel corollario 1.1.2.
Per quanto riguarda l'unicità, è sufficiente dimostrare che per ogni sottorappresentazione W di V isomorfa ad un membro della somma diretta, per esempio V_i, con $1 \leqslant i \leqslant k$, vale:

$$W \subset V_i^{\oplus a_i}.$$

Consideriamo la seguente mappa di proiezione G-lineare:

$$p_j : V \longrightarrow V_j$$

con $1 \leqslant j \leqslant k$ ristretta a $W \subset V$; per il lemma di Schur questa mappa è nulla per ogni $j \neq i$, perchè W non è isomorfo a nessun V_j per $j \neq i$. Questo significa che

$$W \subset V_i^{\oplus a_i}.$$

□

Osservazione 1. I sottospazi $W_i := V_i^{\oplus a_i}$ sono determinati univocamente, mentre la decomposizioe $W_i = V_i^{\oplus a_i}$ di questi è unica solo a meno di isomorfismi.

Questo teorema quindi, permette di limitare il campo di ricerca delle rappresentazioni di un gruppo G alla ricerca di rappresentazioni di G irriducibili, in quanto ogni altra sua rappresentazione può essere scritta come somma diretta di queste ultime. La domanda che nace ora è la seguente: quante sono le rappresentazioni irriducibili di un gruppo? Il numero di tali rappresentazioni è finito? Come può essere calcolato tale numero? Nel prossimo paragrafo introdurremo la *teoria del carattere* che ci aiuterà a rispondere a queste domande.

1.2 Teoria del carattere

Le definizioni e i teoremi che stiamo per dare arrivano al cuore della teoria delle rappresentazioni di gruppi finiti, ottenendo un forte legame fra il gruppo G considerato, le sue classi di coniugio, i laterali, e le sue rappresentazioni irriducibili.

Definizione 1.4. Definiamo il *carattere* di una rappresentazione (ρ, V) di un gruppo finito G la funzione che ad ogni elemento $g \in G$ associa la traccia di $\rho(g)$ su V, ovvero la funzione a valori complessi tale che per ogni $g \in G$ vale:

$$\chi_V(g) := Tr(\rho(g)).$$

Per prima cosa osserviamo che, dal momento che matrici simili hanno la stessa traccia, la funzione carattere di una rappresentazione è una *funzione di classe*, in quanto vale per ogni $h, g \in G$:

$$\chi_V(hgh^{-1}) = Tr(\rho(hgh^{-1})) = Tr(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}) = Tr(\rho(g)) = \chi_V(g).$$

Inoltre vale che

$$\chi_V(1_G) = Tr(I_V) = dim(V).$$

Proposizione 1.2.1. *Date due rappresentazioni di un gruppo finito G, (ρ, V) e (δ, W), valgono le seguenti proprietà:*

- $\chi_{V \oplus W} = \chi_V + \chi_W$;
- $\chi_{V \otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W$;
- $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$.

Dimostrazione. Possiamo calcolare i valori di questi caratteri su un elemento fissato $g \in G$: supponiamo che $\rho(g)$ abbia come autovalori su V $\lambda_1, ..., \lambda_n$ e $\delta(g)$ abbia come autovalori su W $\mu_1, ..., \mu_s$; allora $\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, ..., \mu s$ sono gli autovalori di $\rho(g) \oplus \delta(g)$ su $V \oplus W$, per cui vale la prima proprietà. Analogamente si dimostra la seconda uguaglianza, ricordando come abbiamo definito precedentemente la rappresentazione ottenuta come prodotto tensoriale. Per quanto riguarda la terza proprietà, osserviamo che essendo G un gruppo finito, per ogni $g \in G$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $g^n = e_G$. Questo implica $\rho(g)^n = I$, ovvero che gli autovalori della matrice $\rho(g)$ siano tutti radici n-esime dell'unità. Da'altra parte sappiamo che preso $z \in \mathbb{C}$, con $z^n = 1$, vale $z^{-1} = \overline{z}$. Quindi, per ogni $g \in G$, se la traccia di $\rho(g)$ è la somma di tutti i suoi autovalori, contati con molteplicità, la traccia di $\rho^*(g)$ sarà la somma di tutti i coniugati degli autovalori di $\rho(g)$ contati con molteplicità. □

1.2.1 Esercizio

La funzione carattere sopra definita, che può essere associata ad ogni rappresentazione di G, fornisce molte informazioni riguardo le proprietà delle rappresentazioni stesse. Facciamo ora un esempio di calcolo di tale funzione: sia (ρ, V) la rappresentazione di permutazione associata all'azione di un gruppo finito G su un insieme finito X; possiamo dimostrare che il carattere di V calcolato in g, $\chi_V(g)$, è il numero di elementi di X fissati da g. Ricordiamo che, fissato $g \in G$, l'applicazione $\rho(g)$ agisce nel modo seguente:

$$\begin{aligned} g : V &\longrightarrow V \\ e_x &\longmapsto e_{g \cdot x} \end{aligned}$$

La matrice associata a tale mappa, rispetto alla base $B = \{e_x \,/\, x \in X\}$ di V, sarà una matrice permutatore, cioè che si ottiene permutando le colonne della matrice Identità, perciò avrà tanti 1 nella diagonale quanti sono gli elementi di X fissati da g, mentre tutti gli altri elementi della diagonale saranno nulli. Ecco un primo esempio di descrizione della funzione del carattere di una rappresentazione di un gruppo generico G.

1.2.2 Prima formula di proiezione

Partiamo dimostrando la *prima formula di proiezione* che porta con sé alcune delle conseguenze che stiamo cercando: consideriamo una rappresentazione lineare (ρ, V) di G, definiamo il sottospazio vettoriale di V

$$V^G := \{v \in V \ / \ gv = v \ \forall g \in G\}$$

e la seguente applicazione lineare da V a V:

$$\eta := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g);$$

si tratta di un endomorfismo G-lineare, infatti

$$\sum_{g \in G} \rho(g) = \sum_{g \in G} \rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}$$

(poiché l'applicazione che associa a g l'elemento hgh^{-1} è un'applicazione biunivoca); si ottiene quindi che η è G-lineare,

$$(\sum_{g \in G} \rho(g))\rho(h) = \rho(h)(\sum_{g \in G} \rho(g)).$$

Allora vale la seguente proposizione:

Proposizione 1.2.2. *(Prima formula di proiezione) La mappa η così definita è una proiezione da V a V^G.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che

$$Im(\eta) = V^G;$$

innanzitutto supponiamo che $v \in Im(\eta)$, allora esiste $w \in V$ tale che

$$v = \eta(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(w).$$

Allora, per ogni $h \in G$

$$\rho(h)(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(h)\rho(g)(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(w) = v,$$

quindi $Im(\eta) \subseteq V^G$. L'inclusione inversa si dimostra considerando $v \in V^G$, vale

$$\eta(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = v,$$

per cui $V^G \subseteq Im(\eta)$. Da questa uguaglianza segue che

$$\eta \circ \eta = \eta.$$

$\square$

Grazie a questa proposizione data una qualsiasi rappresentazione V di G possiamo calcolare il numero m di copie della sottorappresentazione banale (che ha dimensione 1) contenuta nella decomposizione isotipica di V:

$$m = dim(V^G) = Tr(\eta) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} Tr(g) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \chi_V(g).$$

La prima uguaglianza deriva proprio da come abbiamo definito lo spazio V^G. L'uguaglianza

$$dim(V^G) = Tr(\eta)$$

viene dalla seguente considerazione: se $B = \{v_1, ..., v_s, v_{s+1}, ..., v_n\}$ è base di V, dove $v_1, ..., v_s \in V^G$, mentre $v_{s+1}, ..., v_n \notin V^G$, allora la matrice che rappresenta η rispetto alla base B per la prima formula di proiezione assume la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 & * & * & * \\ 0 & 1 & ... & 0 & * & * & * \\ ... & ... & ... & ... & * & * & * \\ 0 & 0 & ... & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per cui

$$dim(V^G) = s = Tr(\eta).$$

Infine possiamo notare che se una rappresentazione V di G, che non sia quella banale, è irriducibile, allora la somma di tutti i valori che assume la funzione χ_V al variare di $g \in G$ deve essere zero, perchè in questo caso m vale zero.

La prima formula di proiezione ci permette di dimostrare il prossimo teorema: consideriamo l'insieme

$$\mathbb{C}_{class}(G) := \{f : G \longrightarrow \mathbb{C} \ / f \text{ è funzione di classe}\};$$

si tratta di uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, sul quale possiamo definire un prodotto scalare Hermitiano in questo modo:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}_{class}(G), \quad (\alpha, \beta) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \cdot \beta(g).$$

Abbiamo già osservato che il caratterre di una rappresentazione lineare di G appartiene a $\mathbb{C}_{class}(G)$.

Teorema 1.2.3. *In termini di questo prodotto hermitiano, le funzioni caratteri delle rappresentazioni irriducibili di un gruppo G sono fra loro ortonormali.*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che, date due rappresentazioni irriducibili V e W di un gruppo finito G, vale:

$$(\chi_V, \chi_W) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \cdot \chi_W(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } V \cong W \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Per farlo consideriamo lo spazio vettoriale complesso

$$Hom(V, W) := \{\varphi : V \longrightarrow W \ / \ \varphi \text{ applicazione lineare}\}$$

e

$$Hom(V, W)^G := \{\varphi : V \longrightarrow W \ / \ \varphi \text{ applicazione } G\text{- lineare}\}.$$

Se V e W sono rappresentazioni lineari irriducinili e isomorfe fra di loro, per il lemma di Schur vale

$$dim\Big(Hom(V, W)^G\Big) = 1$$

poiché tutte le applicazioni G-lineari da V a W o sono nulle o sono multipli dell'Identità. Se invece le due rappresentazioni non sono isomorfe fra di loro, allora:

$$dim\Big(Hom(V, W)^G\Big) = 0.$$

Quindi, ricapitolando:

$$dim\Big(Hom(V,W)^G\Big) = \begin{cases} 1 & \text{se } V \cong W \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

D'altra parte possiamo considerare $Hom(V,W)^G$ anch'esso come rappresentazione lineare di G, per cui per la prima formula di proiezione vale:

$$dim\Big(Hom(V,W)^G\Big) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_{Hom(V,W)}(g).$$

Se riusciamo a dimostrare che

$$Hom(V,W) \cong V^* \otimes W$$

come rappresentazione di G, allora per la proposizione 1.2.1 possiamo calcolare il carattere di $Hom(V,W)$ nel modo seguente

$$\chi_{Hom(V,W)} = \overline{\chi_V}\cdot\chi_W$$

e il teorema è dimostrato. Enunciamo dunque la seguente proposizione:

Proposizione 1.2.4. *Siano (ρ, V) e (θ, W) due rappresentazioni lineari di G. Sappiamo allora che anche $(\sigma, Hom(V,W))$, (ρ^*, V^*) e $(\rho^*\otimes\theta, V^*\otimes W)$ sono rappresentazioni di G (vedi paragrafo 1.1.2). Vale che*

$$Hom(V,W) \cong V^* \otimes W$$

come rappresentazione.

Dimostrazione. Innanzitutto costruiamo una base per ognuno dei due spazi vettoriali: se $\{e_1, ..., e_n\}$ è una base di V e $\{b_1, ..., b_m\}$ è una base di W, allora una base per $Hom(V,W)$ sarà l'insieme

$$\{f_{i,j}\}_{1\leqslant i\leqslant n,\, 1\leqslant j\leqslant m}$$

con

$$f_{i,j}(e_k) = \begin{cases} b_j & \text{se } e_k = e_i \\ 0 & \text{se } e_k \neq e_i \end{cases}$$

mentre una base per $V^* \otimes W$ sarà data dall'insieme

$$\{e_i^* \otimes b_j\}_{1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant m}.$$

Sia ora φ l'applicazione lineare tale che

$$\varphi(f_{i,j}) := e_i^* \otimes b_j, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,\, 1 \leqslant j \leqslant m.$$

Vogliamo dimostrare che φ è un isomorfismo G-lineare, ovvero che per ogni $g \in G$ vale:

$$\varphi[\sigma(g)(f_{i,j})] = (\rho^* \otimes \theta)(g)[\varphi(f_{i,j})].$$

Nell'uguaglianza, il termine di sinistra vale:

$$\varphi[\sigma(g)(f_{i,j})] = \varphi[\theta(g) f_{i,j} \rho(g)^{-1}];$$

calcoliamo ora

$$(\theta(g) f_{i,j} \rho(g)^{-1})(e_k) = (\theta(g) f_{i,j})[\rho(g)^{-1}(e_k)] = \begin{cases} \theta(g)(b_j) & \text{se } \rho(g)(e_k) = e_i \\ 0 & \text{se } \rho(g)(e_k) \neq e_i \end{cases}$$

Quindi:

$$\varphi(\theta(g) f_{i,j} \rho(g)^{-1}) = \rho(g) e_i^* \otimes \theta(g)(b_j)$$

che è esattamente il membro di destra dell'uguaglianza che volevamo dimostrare. □

□

Elenchiamo ora cinque corollari di questo teorema che esplicitano chiaramente il legame fra le rappresentazioni irriducibili di un gruppo G e le sue classi di coniugio:

Corollario 1.2.5. *A meno di isomorfismi, il numero di rappresentazioni irriducibili di un gruppo finito G è minore o uguale al numero delle sue classi di coniugio.*

Dimostrazione. Dal teorema precedente viene che i caratteri di rappresentazioni irriducibili non isomorfe sono linearmente indipendenti. Quindi è sufficiente osservare che la dimensione dello spazio $\mathbb{C}_{class}(G)$ è pari al numero di classi di coniugio del gruppo; infatti siano $c_1, ..., c_r$ le classi di coniugio del gruppo finito G, possiamo considerare le rispettive funzioni caratteristiche:

$$\eta_i(g) = \begin{cases} 1 & \text{se } g \in c_i \\ 0 & \text{se } g \notin c_i \end{cases}$$

Si dimostra facilmente che l'insieme

$$\{\eta_i\}_{1 \leqslant i \leqslant r}$$

costituisce una base per $\mathbb{C}_{class}(G)$. □

Corollario 1.2.6. *Ogni rappresentazione V di un gruppo finito G è completamente determinata dal suo carattere.*

Dimostrazione. Sia $V = V_1^{\oplus a_1} \oplus ... \oplus V_k^{\oplus a_k}$, allora

$$\chi_V = \sum_{i=1,...,k} a_i \chi_{V_i}$$

dove ogni funzione di carattere χ_{V_i} è linearmente indipendente dalle altre per il teorema precedente. □

Corollario 1.2.7. *Una rappresentazione V è irriducibile se e solo se vale*

$$(\chi_V, \chi_V) = 1.$$

Dimostrazione. Abbiamo già visto che se V è irriducibile allora vale $(\chi_V, \chi_V) = 1$. Supponiamo ora V rappresentazione di G tale che $(\chi_V, \chi_V) = 1$; allora per le osservazioni precedenti vale:

$$1 = (\chi_V, \chi_V) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \cdot \chi_V(g) = dim\Big(Hom(V, V)^G\Big),$$

cioè stiamo dicendo che gli unici omomorfismi G-lineari da V a V sono i multipli dell'identità. Ora se V fosse riducibile, cioè se V si potesse scrivere come somma diretta di sottorappresentazioni $V_1, ...V_n$, ognuna elevata alla rispettiva potenza, allora l'applicazione φ da V a V che agisce in questo modo:

$$\varphi(v) = \begin{cases} \lambda_1 v & \text{se } v \in V_1 \\ \lambda_2 v & \text{se } v \in V_2 \\ ... \\ \lambda_n v & \text{se } v \in V_n \end{cases}$$

con i $\lambda_i \in \mathbb{C}$ diversi fra loro, sarebbe un'applicazione G-lineare diversa da un multiplo dell'identità, e questo è assurdo. □

Corollario 1.2.8. *La molteplicità a_i di una sottorappresentazione irriducibile V_i che compare nella decomposizione di una rappresentazione V vale:*

$$a_i = (\chi_V, \chi_{V_i}).$$

Dimostrazione. Si ha:

$$(\chi_V, \chi_{V_i}) = (\sum_{j=1,...,k} a_j \chi_{V_j}, \chi_{V_i}) = \sum_{j=1,...,k} a_j (\chi_{V_j}, \chi_{V_i}) = a_i.$$

□

L'ultimo corollario riguarda un caso particolare fra le possibili rappresentazioni di un gruppo finito G, quello della *rappresentazione regolare*. Prima di enunciare il corollario, dunque, definiamo tale rappresentazione.

Definizione 1.5. Sia G un gruppo finito, consideriamo R lo spazio vettoriale con base:

$$\{e_g \ / \ g \in G\}$$

e l'omomorfismo di gruppi:

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(R) \\ h &\longmapsto \rho(h) \, : \, R \longrightarrow R \\ &\qquad\qquad \textstyle\sum a_g e_g \mapsto \sum a_g e_{h \cdot g} \end{aligned}$$

Per come abbiamo costruito R vale $dim(R) = |G|$.

Corollario 1.2.9. *Ogni rappresentazione irriducibile V di G appare nella rappresentazione regolare di G un numero di volte pari a $dim(V)$.*

Dimostrazione. Per dimostrarlo osserviamo che

$$\chi_R(g) = \begin{cases} 0 & \text{se } g \neq e \\ |G| & \text{se g=e} \end{cases}$$

in quanto se $g \neq e$ la sua azione su R non lascia fissato nessun elemento, mentre se $g = e$ tutti gli elementi rimangono fissati (vedi esercizio 1.2.1). Ora se $R = \oplus V_i^{a_i}$, con V_i rappresentazioni irriducibili distinte, allora

$$a_i = (\chi_{V_i}, \chi_R) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_{V_i}(g)} \chi_R = \frac{1}{|G|} \cdot \chi_{V_i}(e) \cdot |G| = dim(V_i).$$

□

In particolare questo corollario prova nuovamente che esiste un numero finito di rappresentazioni irriducibili di un dato gruppo finito G. Inoltre valgono le seguenti uguaglianze:

$$|G| = dim(R) = dim(\oplus V_i^{a_i}) = \sum dim(V_i) \cdot a_i = \sum dim(V_i)^2 \tag{1.1}$$

e se $g \neq e$

$$\chi_R(g) = 0 = \sum \chi_{V_i}(g) \cdot a_i = \sum (dim(V_i))(\chi_{V_i}(g)). \tag{1.2}$$

1.2.3 Formula di proiezione generale

Per migliorare il corollario 1.2.5 sopra enunciato, ovvero ottenere la dimostrazione dell'uguaglianza fra il numero di classi di coniugio di un gruppo finito G e il numero delle sue rappresentazioni irriducibili, dimostriamo ora una formula di proiezione più generale.

Proposizione 1.2.10. *(Formula di proiezione generale) Sia $\alpha : G \longrightarrow \mathbb{C}$ una funzione sul gruppo finito G e supponiamo di definire per ogni rappresentazione (ρ, V) di G l'endomorfismo*

$$\varphi_{\alpha,V} := \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \rho(g),$$

allora $\varphi_{\alpha,V}$ è un endomorfismo di G-moduli, qualsiasi sia la rappresentazione V considerata, se e solo se α è una funzione di classe.

Dimostrazione. Supponiamo che α sia una funzione di classe, allora per ogni $h \in G$:

$$\varphi_{\alpha,V}(\rho(h)(v)) = \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \rho(g)[\rho(h)(v)] =$$

$$= \sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) \cdot \rho(hgh^{-1})(\rho(h)(v)) = \rho(h)[\sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) \cdot \rho(g)(v)] =$$

$$= \rho(h)[\sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \rho(g)(v)] = \rho(h)(\varphi_{\alpha,V}(v)).$$

Per dimostrare l'implicazione contraria, supponiamo che α non sia una funzione di classe: allora esisterebbero due elementi $g, h \in G$ tali per cui

$$\alpha(g) \neq \alpha(hgh^{-1}).$$

Osserviamo che in questo caso esiste una rappresentazione di G, la rappresentazione regolare R, per cui $\varphi_{\alpha,R}$ non è G-lineare: calcoliamo per $g, h \in G$ e $v \in R$

$$\varphi_{\alpha,R}(\rho(h)(v)) = \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \rho(g)[\rho(h)(v)] =$$

$$= \sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) \cdot \rho(hgh^{-1})(\rho(h)(v)) = \rho(h)[\sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) \cdot g(v)].$$

Se $\varphi_{\alpha,R}$ fosse G-lineare, allora dovrebbe anche essere:

$$\varphi_{\alpha,R}(\rho(h)(v)) = \rho(h)[\varphi_{\alpha,R}(v)] = \rho(h)[\sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \rho(g)(v)]$$

e quindi

$$\rho(h)[\sum_{g \in G} \alpha(hgh^{-1}) \cdot \rho(g)(v)] - \rho(h)[\sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \rho(g)(v)] = 0.$$

Ma questo è impossibile, perchè nel caso della rappresentazione regolare, gli endomorfismi associati ad ogni elemento $g \in G$ sono lineramente indipendenti, e quindi dovrebbe essere

$$\alpha(hgh^{-1}) - \alpha(g) = 0 \ \ \forall\, h, g \in G,$$

il che è falso per l'ipotesi che abbiamo fatto che α non sia una funzione di classe. □

Come conseguenza immediata di questo fatto abbiamo il teorema che volevamo dimostrare:

Teorema 1.2.11. *Il numero di rappresentazioni irriducibili di un gruppo G è uguale al numero di classi di coniugio del gruppo. Equivalentemente, l'insieme dei caratteri*

$$\{\chi_V \,/\, V \ \textit{irriducibile}\}$$

costituisce una base ortonormale per $\mathbb{C}_{class}(G)$.

Dimostrazione. Dimostriamo la seconda affermazione: sappiamo già per il teorema 1.2.3 che i caratteri delle rappresentazioni irriducibili sono tra loro ortonormali; rimane quindi da dimostrare che che se esiste una funzione di classe α tale che $(\alpha, \chi_V) = 0$ per ogni V rappresentazione irriducibile di G, allora $\alpha = 0$. Come prima consideriamo l'endomorfismo

$$\varphi_{\alpha,V} := \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \rho(g),$$

per il lemma di Schur deve esistere $\lambda \in G$ per cui vale

$$\varphi_{\alpha,V} = \lambda \cdot I,$$

quindi $Tr(\varphi_{\alpha,V}) = n \cdot \lambda$. Abbiamo

$$\lambda = \frac{1}{n} Tr(\varphi_{\alpha,V}) = \frac{1}{n} \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \chi_V(g) = \frac{|G|}{n} \overline{(\alpha, \chi_{V^*})} = 0.$$

Questo significa che

$$\varphi_{(\alpha,V)} = \sum_{g \in G} \alpha(g) \cdot \rho(g) = 0$$

per ogni rappresentazione V di G, ed in particolare per la rappresentazione regolare $V = R$. Ma in questo caso tutti gli endomorfismi al variare di g sono linearmente indipendenti (lo si può vedere dal fatto che i vettori $g(e_0)$ sono tutti linearmente indipendenti). Quindi vale che $\alpha(g) = 0$ per ogni $g \in G$. □

Questo teorema completa la descrizione del carattere di un gruppo finito in generale. Vedremo nel prossimo esempio come potremo utilizzare i risultati elencati finora per studiare le rappresentazioni di un particolare gruppo finito: il gruppo delle permutazioni su un insieme di quattro elementi, S_4.

1.3 Rappresentazioni di S_4 e tabella del carattere

S_4 è il gruppo simmetrico delle permutazioni di quattro elementi; sappiamo che la sua cardinalità è pari a $4! = 24$ e si può facilmente dimostrare che il numero di classi di coniugio è 5. Infatti vale la seguente

Proposizione 1.3.1. *Due permutazioni di S_n sono coniugate se e solo se hanno la stessa struttura ciclica*[2].

Dimostrazione. Dimostriamo la prima implicazione, ovvero se due permutazioni sono coniugate allora hanno la stessa struttura ciclica: consideriamo $\sigma \in S_n$, σ sarà della forma:

$$\sigma = (a_{1,1}...a_{1,s_1})(a_{2,1}...a_{2,s_2})...(a_{t,1}...a_{t,s_t})$$

[2]Definiamo la struttura ciclica di una permutazione nel modo seguente: supponiamo che la permutazione si scriva come prodotto di cicli disgiunti (ordinati per lunghezza) nel modo seguente:

$$\sigma = (a_{1,1}...a_{1,s_1}) \cdot (a_{2,1}...a_{2,s_2}) \cdot ... \cdot (a_{t,1}...a_{t,s_t})$$

allora la sua struttura ciclica è $(s_1, s_2, ..., s_t)$. Sappiamo che una permutazione di S_n può essere scritta in modo unico come prodotto di cicli disgiunti ordinati per lunghezza (a meno dell'ordine di cicli di uguale lunghezza), quindi questa definizione è ben posta compresi cicli banali di lunghezza 1. Consideriamo ora $\tau \in S_n$, vale:

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_{1,1})...\tau(a_{1,s_1}))(\tau(a_{2,1})...\tau(a_{2,s_2}))...(\tau(a_{t,1})...\tau(a_{t,s_t})),$$

e si può verificare direttamente facendo agire $\tau\sigma\tau^{-1}$ sul primo elemento, $\tau(a_{1,1})$:

$$(\tau\sigma\tau^{-1})(\tau(a_{1,1})) = \tau(\sigma(a_{1,1})) = \tau(a_{1,2}).$$

Analogamente si verifica per gli altri elementi dei cicli seguenti. Inoltre i cicli continuano ad essere disgiunti grazie all'iniettività di τ, quindi abbiamo ottenuto che σ e $\tau\sigma\tau^{-1}$ hanno la stessa struttura ciclica per ogni $\tau \in S_n$. Viceversa, supponiamo di avere $\rho \in S_n$ con la stessa struttura ciclica di ρ:

$$\sigma = (b_{1,1}...b_{1,s_1})(b_{2,1}...b_{2,s_2})...(b_{t,1}...b_{t,s_t}),$$

vogliamo dimostrare che σ e ρ appartengono alla stessa classe di coniugio. Definiamo $\omega \in S_n$ in modo tale che valga:

$$a_{1,1} \mapsto b_{1,1}, ..., a_{1,s_1} \mapsto b_{1,s_1},$$

$$a_{2,1} \mapsto b_{2,1}, ..., a_{2,s_2} \mapsto b_{2,s_2},$$

$$...$$

$$a_{t,1} \mapsto b_{t,1}, ..., a_{t,s_t} \mapsto b_{t,s_t}.$$

Allora vale

$$\omega\sigma\omega^{-1} = \rho,$$

e lo verifichiamo, per esempio, su $b_{1,1}$:

$$(\omega\sigma\omega^{-1})(b_{1,1}) = (\omega\sigma)(a_{1,1}) = \omega(a_{1,2}) = b_{1,2} = \rho(b_{1,1}).$$

$\square$

Corollario 1.3.2. *Il numero delle classi di coniugio di S_n è pari al numero delle partizioni di n, ovvero delle decomposizioni di n nella somma di numeri interi positivi.*

Le partizioni di 4 sono:
$4 = 1 + 1 + 1 + 1 \rightsquigarrow$ classe di coniugio dell'identità;
$4 = 2 + 1 + 1 \rightsquigarrow$ classe di coniugio delle trasposizioni;
$4 = 3 + 1 \rightsquigarrow$ classe di coniugio dei tricicli;
$4 = 4 \rightsquigarrow$ classe di coniugio dei cicli di lunghezza 4;
$4 = 2 + 2 \rightsquigarrow$ classe di coniugio dei prodotti di due trasposizioni disgiunte.
Dai risultati precedenti abbiamo ottenuto che per studiare tutte le possibili rappresentazioni di S_4 è sufficiente trovare le rappresentazioni irriducibili, che sono 5; partiamo definendo la più semplice, la rappresentazione *banale*, con $U = \mathbb{C}$, $dim(U) = 1$ e

$$\begin{aligned} \rho : S_4 &\longrightarrow GL(U) \\ g &\longmapsto \rho(g) : U \longrightarrow U \\ &\qquad\qquad\quad v \longmapsto v \end{aligned}$$

Un'altra rappresentazione irriducibile semplice da trovare è la rappresentazione *alternante*; definiamo $U' = \mathbb{C}$ e

$$\begin{aligned} \rho' : S_4 &\longrightarrow GL(U') \\ g &\longmapsto \rho'(g) : U' \longrightarrow U' \\ &\qquad\qquad\quad v \longmapsto (-1)^{sgn(g)} \cdot v \end{aligned}$$

Consideriamo poi la seguente rappresentazione: $V = \mathbb{C}^4$ e

$$\begin{aligned} \rho'' : S_4 &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \rho''(g) : V \longrightarrow V \\ &\qquad\qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_{g^{-1}(1)} \\ z_{g^{-1}(2)} \\ z_{g^{-1}(3)} \\ z_{g^{-1}(4)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lo spazio W generato dal vettore $(1, 1, 1, 1)$ risulta essere invariante sotto l'azione di $\rho''(g)$ per ogni $g \in G$, per cui la rappresentazione $(\rho''_{/W}, W)$ è isomorfa alla rappresentazione banale. Se definiamo

$$U'' := \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0\},$$

con

$$V = W \oplus U'',$$

allora $(\rho''_{/U''}, U'')$ risulta essere un'ulteriore rappresentazione irriducibile per S_4, detta rappresentazione *standard*, di dimensione 3. Per visualizzare meglio le rappresentazoni individuate si utilizza la *tabella dei caratteri*, in cui si mettono nella prima riga le classi di coniugio del gruppo identificate da un rappresentante, insieme con il numero di elementi appartenenti ad ogni classe, e nella prima colonna le rappresentazioni irriducibili trovate. La tabella viene poi riempita con il valore della funzione di carattere della rappresentazione irriducibile corrispondente, calcolata su ogni classe di coniugio del gruppo. Vediamo finora come risulta essere fatta la tabella del carattere di S_4:

		1	6	8	6	3
S_4	dim	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
U	1	1	1	1	1	1
U'	1	1	-1	1	-1	1
U''	3	3	1	0	-1	-1

La riga corrispondente alla rappresentazione banale è caratterizzata da una fila di 1 in quanto ad ogni elemento viene fatta corrispondere l'applicazione Identità da $\mathbb{C}$ in se stesso. Nella seconda riga si hanno 1 e -1 a seconda del segno della permutazione corrispondente. Il calcolo della terza riga risulta essere, invece, meno banale, vediamo come si svolge il ragionamento: vale

$$\chi_{U''} = \chi_V - \chi_W$$

e

$$\chi_W(g) = \chi_U(g) = 1\, \forall g \in G,$$

quindi non ci rimane che calcolare χ_V. Calcoliamo il carattere su ogni classe di coniugio:

- $\chi_V(Id) = 4;$

- $\chi_V((1\,2)) = 2$ perchè ha come matrice corrispondente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

- $\chi_V((1\,2\,3)) = 1$ perchè ha come matrice corrispondente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

- $\chi_V((1\,2\,3\,4)) = 0$ perchè ha come matrice corrispondente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

- $\chi_V((1\,2)(3\,4)) = 0$ perchè ha come matrice corrispondente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quindi

$$\chi_{U''} = \chi_V - \chi_W = (4\ 2\ 1\ 0\ 0) - (1\ 1\ 1\ 1\ 1) = (3\ 1\ 0\ \ -1\ \ -1).$$

Ora ci rimangono da scoprire altre due rappresentazioni irriducibili di S_4, tali per cui valga l'uguaglianza 1.1 :

$$24 = |S_4| = \sum_{1=1,\ldots,5} (dim(U_i))^2;$$

essendo che per quanto riguarda le rappresentazioni irriducibili trovate finora la somma delle loro dimensioni al quadrato vale (1+1+9) = 11, ci aspettiamo una rappresentzione di dimensione 3 ed una rappresentazione di dimensione 2.
La prima la costruiamo facendo il prodotto tensoriale fra U'' e U':

- $U'' \otimes U'$ ha dimensione 3;
- $\chi_{U''\otimes U'} = \chi_{U''} \cdot \chi_{U'} = (3 \ -1 \ 0 \ 1 \ -1)$;
- il suo carattere è diverso da tutti e tre i caratteri delle rappresentazioni precedenti.

Verifichiamo che questa rappresentazione è irriducibile:

$$(\chi_{U''\otimes U'}, \chi_{U''\otimes U'}) = \frac{1}{|S_4|} \sum_{g \in S_4} \overline{\chi_{U''\otimes U'}(g)} \cdot \chi_{U''\otimes U'}(g) =$$

$$= \frac{1}{24}(9 \cdot 1 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3) = 1,$$

quindi $U'' \otimes U'$ è irriducibile. Per calcolare l'ultima rappresentazione irriducibile, che chiameremo T, quella che manca per completare il quadro delle rappresentazioni irriducibili di S_4, utilizziamo il teorema 1.2.3 che ci dice che questa deve essere ortogonale a tutte le altre rappresentazioni irriducibili finora trovate. Facendo i calcoli si ottiene un sistema di 5 equazioni (di cui una, l'ultima, non lineare)

$$\begin{cases} (\chi_T, \chi_U) = 0 \\ (\chi_T, \chi_{U'}) = 0 \\ (\chi_T, \chi_{U''}) = 0 \\ (\chi_T, \chi_{U''\otimes U'}) = 0 \\ (\chi_T, \chi_T) = 1 \end{cases}$$

e 5 incognite:

$$\chi_T(Id), \ \chi_T((1\,2)), \ \chi_T((1\,2\,3)), \ \chi_T((1\,2\,3\,4)), \ \chi_T((1\,2)(3\,4)).$$

Si arriva facilmente alla seguente soluzione:

$$\chi_T = (2\ 0\ \ -1\ 0\ 2).$$

Quindi riaggiornando la tabella dei caratteri, avremo:

		1	6	8	6	3
S_4	dim	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
U	1	1	1	1	1	1
U'	1	1	-1	1	-1	1
U''	3	3	1	0	-1	-1
$U'' \otimes U'$	3	3	-1	0	1	-1
T	2	2	0	-1	0	2

1.4 Esempio: il gruppo ciclico C_n

Il gruppo ciclico C_n è il gruppo definito come

$$\{r^i \,/\, i = 0, ..., n-1\}$$

dove r è un elemento qualsiasi tale che $r^n = 1$. Questo gruppo può essere pensato come il gruppo delle rotazioni di angolo $2i\pi/n$ attorno all'origine del piano cartesiano. Si tratta evidentemente di un gruppo *abeliano*, per cui enunciamo la seguente proposizione che ci aiuta nel nostro tentativo di trovare le rappresentazioni irriducibili di C_n:

Proposizione 1.4.1. *Se G è un gruppo abeliano finito e (ρ, V) è una sua rappresentazione irriducibile, allora $dim(V) = 1$.*

Dimostrazione. Innanzitutto osserviamo che in generale se (ρ, V) è la rappresentazione di un qualsiasi qualsiasi gruppo finito, abeliano e non abeliano, l'applicazione $\rho(g)$ con $g \in G$ può non essere un omomorfismo fra G-moduli. Infatti potrebbe essere per $h \in G$:

$$g(h(v)) \neq h(g(v).$$

In particolare $\rho(g) : V \longrightarrow V$ è G-lineare se e solo se g appartiene al centro[3] $Z(G)$ di G.
Se G è abeliano,

$$Z(G) = G$$

e $\rho(g)$ è sempre una mappa G-lineare; possiamo quindi applicare il lemma di Schur, ottenendo che per ogni $g \in G$, $\rho(g) = \lambda \cdot I$ per qualche $\lambda \in \mathbb{C}$. Questo significa che ogni sottospazio $W \subset V$ è sottospazio invariante di V, per cui V per essere irriducibile deve avere necessariamente dimensione 1. $\square$

Questo significa che le rappresentazioni irriducibili dei gruppi abeliani sono gli elementi del gruppo duale, ovvero gli omomorfismi

$$\rho : G \longrightarrow \mathbb{C}^*.$$

Questo discorso vale anche per il gruppo ciclico C_n, che è abeliano, per cui ha come rappresentazioni irriducibili solo rappresentazioni di grado 1. In particolare una sua rappresentazione dovrà associare ad r un elemento w di $\mathbb{C}$, ed essendo un omomorfismo di gruppi, ad r^i associerà w^i. Infine, essendo che $r^n = 1$, allora dovrà essere $w^n = 1$, cioè w dovrà essere una radice n-esima dell'unità,

$$w = e^{2i\pi h/n}, \text{ con } h = 0, 1, ..., n-1.$$

Otteniamo quindi n rappresentazioni di grado 1,

$$V_0, V_1, ..., V_{n-1},$$

corrispondenti alle n possibilità di scegliere w, i cui caratteri sono dati da:

$$\chi_{V_h}(r^i) = e^{\frac{2i\pi hk}{n}}.$$

Per esempio, per $n = 3$ avremo la seguente tabella dei caratteri:

[3]Dato un gruppo G, si definisce centro di G l'insieme

$$Z(G) := \{z \in G \,/\, zg = gz \;\forall g \in G\}.$$

C_3	1	r	r^2
χ_{V_0}	1	1	1
χ_{V_1}	1	α	α^2
χ_{V_2}	1	α^2	$\alpha^4 = \alpha$

dove $\alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ e vale che nel primo caso $w = 1$, nel secondo caso $w = \alpha$, nel terzo caso $w = \alpha^2$.

Capitolo 2

Rappresentazioni Indotte

Nei prossimi capitoli ci concentreremo su un caso particolare delle rappresentazioni lineari di gruppi finiti: il caso delle *rappresentazioni indotte*.

2.1 Conoscenze preliminari

Prima di definire le rappresentazioni indotte, diamo alcune nozioni algebriche di base:

Definizione 2.1. Dato un gruppo G ed un suo sottogruppo H, per ogni $g \in G$ denotiamo con gH l'insieme seguente:

$$gH := \{g \cdot h / \, h \in H\}.$$

Questo insieme è detto *laterale sinistro* di H, e in particolare si tratta del laterale sinistro che contiene g.

Definizione 2.2. Diciamo che due elementi $g, g' \in G$ sono *congruenti* modulo H,

$$g \equiv g' \pmod{\mathrm{H}},$$

se appartengono allo stesso laterale, ovvero se

$$g^{-1}g' \in H.$$

L'insieme dei laterali sinistri è denotato con G/H ed costituisce una partizione per G. Se $|G| = n$ e $|H| = m$, allora $|G/H| = n/m$, e questo è detto indice di G su H: $[G : H]$. Se sciegliamo un elemento di ogni laterale di G, otteniamo un sottoinsieme di G, R, che è chiamato *sistema di rappresentanti* di G/H. Ogni elemento di G può essere scritto in modo unico come prodotto di un elemento di R ed un elemento di H. Infatti, sia $g \in G$, allora g apparterrà sicuramente ad un laterale di G, ovvero esisterà $r \in R$ tale che

$$g \in rH,$$

e questo r è unico. Allora vale che esiste ed è unico $h \in H$ tale che

$$g = rh.$$

2.2 Rappresentazione Indotte

2.2.1 Definizione

Siano G un gruppo finito, H un sottogruppo di G e (ρ, V) una rappresentazione lineare di G, consideriamo l'applicazione:

$$\begin{aligned} \rho_H : H &\longrightarrow GL(V) \\ h &\longmapsto \rho_H(h) := \rho(h) : V \longrightarrow V \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\quad v \longmapsto h \cdot v \end{aligned}$$

Sia poi W una sottorappresentazione di ρ_H, ovvero un sottospazio vettoriale di V tale che

$$h \cdot w \in W \;\; \forall\, h \in H, \forall\, w \in W.$$

Possiamo denotare con θ l'applicazione

$$\theta : H \longrightarrow GL(W)$$

e otteniamo una rappresentazione per H, (θ, W). Vale la seguente:

Osservazione 2. Per ogni $g \in G$ lo spazio vettoriale $\rho(g)(W)$ dipende solamente dal laterale sinistro gH in cui si trova g.

Dimostrazione. Siano g, g' due elementi appartenenti allo stesso laterale, questo significa che esiste $h \in H$ tale che $g = g'h$, allora:

$$\rho(g)(W) = gW = g'hW = g'W = \rho(g')W.$$

$\square$

Quindi stiamo affermando che tutti gli elementi dell'insieme gH agiscono su W nello stesso modo: se denotiamo con σ un laterale di G, allora possiamo definire

$$W_\sigma := \rho(g)(W) \quad \forall g \in \sigma.$$

È chiaro che tutti gli spazi vettoriali W_σ, al variare dei laterali σ di G/H, sono permutati fra di loro tramite l'azione degli elementi di G: la somma

$$\sum_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

risulta quindi essere una sottorappresentazione di V.

Definizione 2.3. Diciamo che una rappresentazione (ρ, V) di un gruppo finito G è indotta da una rappresentazione (θ, W) di H, H sottogruppo di G, se V può essere scritto come somma diretta degli spazi W_σ:

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma.$$

Teorema 2.2.1. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

- *la rappresentazione (ρ, V) di G è indotta dalla rappresentazione (θ, W) di H, con H sottogruppo di G;*

- *ogni elemento $x \in V$ può essere scritto univocamente come*

$$x = \sum_{\sigma \in G/H} x_\sigma$$

dove

$$x_\sigma \in W_\sigma \quad \forall \sigma \in G/H;$$

- *se R è un sistema di rappresentanti di G/H, lo spazio vettoriale V è la somma diretta dei $\rho(r)W$, con $r \in R$.*

In particolare abbiamo che

$$dim(V) = \sum_{r \in R} dim(\rho(r)W) = [G : H] \cdot dim(W).$$

Lemma 2.2.2. *Supponiamo che una rappresentazione (ρ, V) sia indotta da (θ, W), e sia (ρ', V') un'ulteriore rappresentazione di G. Sia*

$$f : W \longrightarrow V'$$

una mappa lineare tale che

$$f(\theta(h)(w)) = \rho'(h)f(w) \ \ \forall\, h \in H, \forall\, w \in W,$$

allora esiste ed è unica la mappa lineare $F : V \longrightarrow V'$ tale che

- $F(w) = f(w)\ \forall\, w \in W;$
- $F(\rho(g)(v)) = \rho'(g)F(v) \ \ \forall\, g \in G, \forall\, v \in V.$

Questo significa che ogni momorfismo di H-moduli si estende in maniera unica ad un morfismo di G-moduli.

Nella seguente dimostrazione ed in generale più avanti nel testo per una maggiore semplicità di notazione indicheremo con ρ_g l'azione della mappa $\rho(g)$.

Dimostrazione. Dimostriamo questo lemma in due parti: prima dimostriamo l'esistenza di tale F e poi la sua unicità;

- ESISTENZA: consideriamo un elemento $v \in V$, dobbiamo capire come agisce F su di esso. Poiché V si può scrivere come somma dirretta degli spazi W_σ, dove con σ indichiamo i laterali di H in G, allora v si potrà scrivere come somma di elementi ognuno dei quali appartenente ad uno spazio vettoriale W_σ diverso. Inoltre, dato che la F deve essere una mappa lineare, è sufficiente stabilire come essa agisce sui singoli elementi degli spazi W_σ al variare di σ su G/H. Fissiamo dunque $\sigma \in G/H$ e consideriamo $v \in W_\sigma$, allora vale per ogni $g \in \sigma$:

$$\rho_g^{-1}(v) \in W.$$

Definiamo

$$F(v) := \rho'_g f(\rho_g^{-1} v);$$

ora dobbiamo controllare i seguenti fatti:

- ⋆ la definizione di F non deve dipendere dal rappresentante del laterale scelto; se prendiamo gh, con $h \in H$, abbiamo:

$$\rho'_{gh} f(\rho_{gh}^{-1} v) = \rho'_g \theta_h f(\theta_h^{-1} \rho_g^{-1} v) =$$

$$= \rho'_g f(\theta_h \theta_h^{-1} \rho_g^{-1} v) = \rho'_g f(\rho_g^{-1} v).$$

- ⋆ la definizione di F deve soddisfare la prima condizione: se $w \in W$ scelgo come g l'elemento neutro di G, allora $F(w) = f(w)$;
- ⋆ la definizione di F, infine, deve soddisfare la seconda uguaglianza, ovvero:

$$F \circ \rho_g = \rho'_g \circ F \quad \forall g \in G.$$

  Sia $v \in W_\sigma$ e $s \in \sigma$, allora

$$\rho'_g F(v) := \rho'_g \rho'_s f(\rho_s^{-1} v).$$

  D'altra parte se $v \in W_\sigma$, allora $\rho_g v \in W_{g\sigma}$ per cui $\rho_{gs}^{-1} v \in W$; avremo:

$$F(\rho_g v) := \rho'_{gs} f(\rho_{gs}^{-1} \rho_g v) = \rho'_g \rho'_s f(\rho_s^{-1} \rho_g^{-1} \rho_g v) = \rho'_g \rho'_s f(\rho_s^{-1} v),$$

  e l'uguaglianza è dimostrata.

- UNICITÀ: supponiamo che esistano due mappe lineari, F e $\tilde{F}$ che soddisfano le due condizioni del teorema; allora presi $v \in W_\sigma$ e $g \in \sigma$ avremo:

$$F(v) = F(\rho_g \rho_g^{-1} v) = (2) = \rho'_g F(\rho_g^{-1} v) = (1) =$$

$$= \rho'_g f(\rho_g^{-1} v) = (1) = \rho'_g \tilde{F}(\rho_g^{-1} v) = (2) = \tilde{F}(v)$$

dove con (1) si intende che l'uguaglianza deriva dal fatto che entrambe le applicazioni godono della prima proprietà del teorema, mentre con (2) si intende che l'uguaglianza deriva dal fatto che le due mappe soddisfano la seconda uguaglianza del teorema. Siccome questa dimostrazione vale per ogni $v \in W_\sigma$ e sappiamo che V si può scrivere come soma diretta degli spazi W_σ al variare di $\sigma \in G/H$, allora essendo F lineare la dimostrazione vale per ogni elemento di $v \in V$.

□

2.2.2 Esempi

- Dati G gruppo finito e H sottogruppo di G, la rappresentazione di permutazione associata all'azione sinistra di G sull'insieme $X = G/H$ è indotta dalla rappresentazione banale di H, (θ, W), con θ applicazione banale che manda ogni elemento di W nell'Identità e $W =< e_H >$ ovvero $dim(W) = 1$. L'azione sinistra di G su $X = G/H$ è definita così:

  $$\begin{array}{ccc} G \times \frac{G}{H} & \longrightarrow & \frac{G}{H} \\ (\, g \, , \, \sigma \,) & \longmapsto & g \cdot \sigma \end{array}$$

  da cui deriva che la rappresentazione di permutazione di G, (ρ, V), sarà del tipo:

  $$V :=< \{ e_\sigma \,/\, \sigma \in G/H \} >$$

  e

  $$\begin{array}{ccccccc} \rho : G & \longrightarrow & GL(V) & & & & \\ g & \longmapsto & \rho(g) \cdot \sigma : & V & \longrightarrow & V & \\ & & & e_\sigma & \longmapsto & e_{g \cdot \sigma}. & \end{array}$$

Ora al variare di σ in G/H otteniamo diversi spazi vettoriali, facendo agire $\rho(g)$ su W, dove $g \in \sigma$, e ognuno di questi ha dimensione uno:

$$W_\sigma =< e_\sigma > .$$

Avremo:

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma.$$

- Sia G un gruppo finito, consideriamo la rappresentazione regolare (ρ, V) che abbiamo introdotto nella definizione 1.5; sia H un sottogruppo di G e sia W lo spazio vettoriale generato dall'insieme $\{e_h \,/\, h \in H\}$, la rappresentazione (θ, W) di H che si trova restringendo ρ allo spazio W è la rappresentazione regolare di W. Vale che la rappresentazione (ρ, V) è indotta da (θ, W). Infatti, consideriamo gli elementi $\sigma \in G/H$; preso un generico $g \in \sigma$:

$$W_\sigma = \{e_{g \cdot h} \,/\, h \in H\}.$$

Quindi possiamo scrivere V come

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma$$

perchè in ogni laterale è presente un numero di elementi pari ad $|H|$, per cui al variare dei laterali σ, che sono in numero $|G|/|H|$, si ottengono tutti gli elementi della base di V.

- Sia G un gruppo finito, H e H' sottogruppi di G; supponiamo che le rappresentazioni di questi sottogruppi, (θ, W) e (θ', W'), inducano su G le rappresentazioni (ρ, V) e (ρ', V') rispettivamente. Allora vale che $\rho \oplus \rho'$ è indotta da $\theta \oplus \theta'$. Infatti avremo:

$$\begin{aligned} \theta \oplus \theta' : \, H &\longrightarrow GL(W \oplus W') \\ h &\longmapsto \theta(h) \oplus \theta'(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \oplus \rho' : G &\longrightarrow GL(V \oplus V') \\ g &\longmapsto \rho(g) \oplus \rho'(g) \end{aligned}$$

e

$$V \oplus V' = (\bigoplus_{\sigma \in G/H} W_\sigma) \oplus (\bigoplus_{\omega \in G/H'} W'_\omega).$$

2.2.3 Teorema di esistenza e unicità

Gli esempi riportati ci possono aiutare a comprendere meglio il seguente teorema, che rappresenta il punto centrale di questo capitolo:

Teorema 2.2.3. *Sia (θ, W) una rappresentazione lineare di un sottogruppo H di G, allora esiste una rappresentazione (ρ, V) di G indotta da (θ, W) che è unica a meno di isomorfismi.*

Dimostrazione. Anche in questo caso dimostriamo esistenza ed unicità di tale rappresentazione:

- ESISTENZA: supponiamo $n = [G : H]$, avremo che l'insieme dei laterali di H su G è composto da n elementi che indichiamo con σ_i. Scegliamo un rappresentante per ogni laterale, avremo $R = \{g_{\sigma_1}, ..., g_{\sigma_n}\}$ insieme di tali rappresentanti. Ora definiamo lo spazio vettoriale

  $$V := \bigoplus_{i=1,...,n} W^{\sigma_i}$$

  dove ogni W^{σ_i} è una copia di W, e definiamo

  $$\rho : G \longrightarrow GL(V)$$

  nel modo seguente:

  ⋆ se $w \in W$ e $g = g_{\sigma_i} \in R$, allora con $\rho_{g_{\sigma_i}}(w)$ denotiamo l'elemento che corrisponde a w in W^{σ_i};

  ⋆ se $w \in W$ e g è un elemento generico di G, allora g appartiene ad un laterale σ_i, per cui esiste $h \in H$ tale che $g = g_{\sigma_i} \cdot h$. Avremo:

  $$\rho_g(w) = \rho_{g_{\sigma_i} \cdot h}(w) = \rho_{g_{\sigma_I}}(\theta_h(w)).$$

⋆ sia $v \in W^{\sigma_i}$, allora esiste $w \in W$ tale che $v = \rho_{g_{\sigma_i}}(w)$. Quindi preso $g \in G$ tale che $g \cdot g_{\sigma_i} = g_{\sigma_j} \cdot h$, con $h \in H$ e $j = 1, ..., n$, vale:

$$\rho_g(v) = \rho_g \rho_{g_{\sigma_i}} w = \rho_{g_{\sigma_j}} \theta_h(w).$$

⋆ se consideriamo ora un qualsiasi elemento v di V, esso si può scrivere come

$$v = \sum_{i=1,...n} w_i$$

dove $w_i \in W^{\sigma_i}$ per ogni $i = 1, ..., n$, quindi essendo ρ_g lineare la sua azione su V è già determinata.

Per come abbiamo costriuto ρ si vede facilmente che si tratta di un morfismo di gruppi; inoltre possiamo notare che fissato σ_i laterale allora

$$\rho_{g_{\sigma_i}} W = W^{\sigma_i},$$

per cui vale:

$$V = \bigoplus_{i=1,...,n} \rho(g_{\sigma_i} W)$$

ovvero la rappresentazione (ρ, V) è indotta dalla rappresentazione (θ, W).

- UNICITÀ: siano (ρ, V) e (ρ', V') due rappresentazioni di G indotte dalla rappresentazione di H (θ, W); supponiamo come prima di prendere un insieme di rappresentanti dei laterali di H su G, $R = \{g_{\sigma_1}, ..., g_{\sigma_n}\}$, allora deve valere per entrambe le rappresentazioni:

$$V = \bigoplus_{i=1,...,n} \rho_{g_{\sigma_i}} W \text{ e } V = \bigoplus_{i=1,...,n} \rho'_{g_{\sigma_i}} W$$

ovvero V e V' hanno la stessa dimensione, cioè sono isomorfi come spazi vettoriali. Ora vogliamo capire se sono isomorfi come G-moduli, ovvero se esiste un isomorfismo G-lineare da V a V'. Consideriamo:

$$\begin{aligned} \varphi : V &\longrightarrow V' \\ \sum w_{\sigma_i} &\longmapsto \sum \rho'_{g_{\sigma_i}} \rho_{g_{\sigma_i}} w_{\sigma_i} \end{aligned}$$

dove ogni $w_{\sigma_i} \in W^{\sigma_i}$. φ è evidentemente un'applicazione lineare fra i due spazi vettoriali, per di più iniettiva e suriettiva, vogliamo dimostrare che per ogni $s \in G$ vale:

$$\varphi \circ \rho_s = \rho'_s \circ \varphi \quad \forall s \in G;$$

da una parte abbiamo

$$\varphi(\rho_s(v)) = \varphi(\rho_s(\sum_{i=1}^{n} w_{\sigma_i})) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \rho_s w_{\sigma_i}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \rho'_{sg_{\sigma_i}} \rho^{-1}_{sg_{\sigma_i}} (\rho_s w_{\sigma_i}) = \sum_{i=1}^{n} \rho'_{sg_{\sigma_i}} \rho^{-1}_{g_{\sigma_i}} (w_{\sigma_i});$$

dall'altra:

$$\rho'_s(\varphi(v)) = \rho'_s(\varphi(\sum_{i=1}^{n} w_{\sigma_i})) =$$

$$= \rho'_s(\sum_{i=1}^{n} \rho'_{g_{\sigma_i}} \rho^{-1}_{g_{\sigma_i}} w_{\sigma_i})) = (\sum_{i=1}^{n} \rho'_s \rho'_{g_{\sigma_i}} \rho^{-1}_{g_{\sigma_i}} w_{\sigma_i})).$$

I due risultati sono uguali, quindi l'unicità è dimostrata.

$\square$

Capitolo 3

Rappresentazioni Indotte Irriducibili

In questo capitolo introdurremo una definizione di rappresentazione indotta più algebrica rispetto alla precedente, e dimostreremo che le due definizioni date sono equivalenti.
Infine, come ultimo punto di studio sulle rappresentazioni indotte, ci chiederemo quali di queste siano irriducibili, ovvero se esiste un criterio che lega l'irriducibilità della rappresentazione indotta a quella della rappresentazione di partenza. Effettivamente dei risultati sono stati raggiunti, per comprendere i quali introdurremo ulteriori proprietà che caratterizzano le rappresentazioni indotte.

3.1 Nuova definizione

3.1.1 Algebra di gruppo

Sia G il gruppo finito:

$$G = \{g_1 = e_G, g_2, ..., g_n\}$$

con $n = |G|$. Possiamo definire l'insieme

$$\mathbb{C}[\mathbb{G}] := \{c_1 g_1 + ... + c_n g_n \,/\, c_i \in \mathbb{C} \quad \forall\, i = 1, ..., n\}.$$

In questo insieme dati due elementi

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i \quad \text{e} \quad l = \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot g_i$$

possiamo definire le seguenti operazioni:

- SOMMA:
$$f + g := \sum_{i=1}^{n} (f_i + l_i) \cdot g_i;$$
- PRODOTTO:
$$f \cdot g := \sum_{g_k \cdot g_j = g_i} f_k l_j g_i;$$
- PRODOTTO per SCALARI:
$$\lambda \cdot f := \sum_{i=1}^{n} (\lambda f_i) \cdot g_i \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Si può vedere facilmente che l'insieme con le tre operazioni costituisce un'algebra.

Definizione 3.1. L'insieme $\mathbb{C}[G]$ è detto algebra di gruppo di G.

Data una rappresentazione lineare per G, (ρ, V), con V spazio vettoriale sul campo $\mathbb{C}$, possiamo assegnare anche all'insieme $\mathbb{C}[G]$ un'azione su V nel modo seguente: per ogni $x \in V$ e per ogni elemento $c_1 g_1 + ... + c_n g_n \in \mathbb{C}[G]$,

$$\rho'(c_1 g_1 + ... + c_n g_n)(x) := c_1(\rho_{g_1} x) + ... + c_n(\rho_{g_n} x);$$

otteniamo quindi una rappresentazione lineare (ρ', V) per $\mathbb{C}[G]$. Questo significa che se V è un G-modulo allora V è anche un $\mathbb{C}[G]$-modulo.
D'ora in poi quindi, con "$\mathbb{C}[G]$-modulo V" intenderemo una rappresentazione lineare per G, e indicheremo l'azione di G su V semplicemente con

$$g \cdot v$$

dove $g \in G$ e $v \in V$.

3.1.2 Rappresentazione indotta come estensione di scalari

Sia ora G un gruppo finito, H sottogruppo di G, e sia $R = \{s_1, ..., s_n\}$ un insieme dei rappresentanti dei laterali sinistri di H su G, $[G : H] = n$. Sia V un $\mathbb{C}[G]$-modulo e sia W un sottospazio di V invariante sotto l'azione di H, ovvero W è $\mathbb{C}[H]$-modulo. Definiamo

$$W' = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

il $\mathbb{C}[G]$-modulo ottenuto partendo da W ed estendendo il prodotto per scalari a elementi appartenenti a $\mathbb{C}[G]$. Gli elementi di W' saranno quindi della forma:

$$\sum c \otimes w,$$

dove $c \in \mathbb{C}[G], w \in W$, con la relazione

$$ch \otimes w = c \otimes hw \quad \forall h \in H.$$

W' è adesso un $\mathbb{C}[G]$-modulo definito per ogni $g \in \mathbb{C}[G]$ da:

$$g(c \otimes w) := gc \otimes w.$$

Definizione 3.2. Sotto le precedenti ipotesi, definiamo W' la rappresentazione lineare di G indotta da W.

Vogliamo dimostrare che questa nuova definizione di rappresentazione indotta equivale alla definizione 2.3. Sia quindi (ρ, V) rappresentazione lineare di G tale che

$$V = \bigoplus_{s \in R} \rho(s)W,$$

un elemento generico di V si scrive come

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)w,$$

con $w \in W$, mentre un elemento generico di W' si scrive come

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \otimes w$$

con $w \in W$. Costruiamo l'applicazione lineare $\Psi : V \longrightarrow W'$ tale che

$$\Psi(\sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)(w)) := \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes w.$$

Ψ risulta essere un isomorfismo G-lineare; infatti per ogni $g \in G$, con

$$gs_i = s_{j_i} h_{j_i},$$

e per ogni elemento $\sum \rho(s_i)(w)$ di V vale:

$$\Psi[\rho(g)(\sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)(w))] = \Psi[\sum_{i=1}^{n} \rho(g)\rho(s_i)(w)] =$$

$$\Psi[\sum_{i=1}^{n} \rho(s_{j_i})(\rho(h_{j_i})(w))] = \sum_{i=1}^{n} s_{j_i} \otimes (h_{j_i} \cdot w) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} s_{j_i} h_{j_i} \otimes w = \sum_{i=1}^{n} gs_i \otimes w =$$

$$= g \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes w = g[\Psi(\sum_{i=1}^{n} \rho(s_i)(w))].$$

Possiamo notare che da questa nuova definizione di rappresentazione indotta ne conseguono in maniera ovvia l'esistenza e l'unicità delle rappresentazioni indotte, dimostrate precedentemente in questa tesi (vedi teorema 2.2.3).
Dalle osservazioni fatte finora segue la seguente proposizione::

Proposizione 3.1.1. *Sia V un $\mathbb{C}[G]$-modulo che sia somma diretta di sottospazi vettoriali che vengono permutati tra loro dall'azione di G in maniera transitiva:*

$$V = \bigoplus_{i \in I} W_i, \quad I \subset \mathbb{N}.$$

Supponiamo che $i_0 \in I$ e $W = W_{i_0}$, definiamo l'insieme

$$H := \{g \in G \,/\, gW = W\},$$

allora valgono i seguenti fatti:

- *H è un sottogruppo di G;*
- *V come $\mathbb{C}[G]$-modulo è indotto dal $\mathbb{C}[H]$-modulo W.*

3.2 Reciprocità di Frobenius

Definizione 3.3. Consideriamo f una funzione di classe su H sottogruppo di G; per ogni $g \in G$ definiamo la funzione:

$$f'(g) := \frac{1}{h} \sum_{s \in G, s^{-1}gs \in H} f(s^{-1}gs), \quad \text{con } h = |H|;$$

f' è detta funzione indotta da f e si indica con $Ind_H^G(f)$ (o semplicemente $Ind(f)$ se non c'è ambiguità di notazione).

Teorema 3.2.1. *(Formula di reciprocità di Frobenius) Sia ψ una funzione di classe su H e φ una funzione di classe su G, vale:*

$$(\psi, Res(\varphi))_H = (Ind(\psi), \varphi)_G$$

dove con $(\cdot,\cdot)_H$ e $(\cdot,\cdot)_G$ indichiamo i rispettivi prodotti scalari sugli insiemi $\mathbb{C}_{class}(H)$ e $\mathbb{C}_{class}(G)$, e $Res(\varphi)$ è la restrizione di φ ad H.

Dimostrazione. Dal momento che ogni classe di funzione è una combinazione lineare di caratteri di rappresentazioni irriducibili, possiamo assumere come ipotesi che ψ sia la funzione carattere di una rappresentazione lineare irriducibile (θ, W) di H, e che φ sia la funzione carattere di una rappresentazione lineare irriducibile (ρ, V) di G. Per dimostrare il teorema ricordiamo che vale il seguente risultato:

Lemma 3.2.2. *Se ϕ_1 e ϕ_2 sono i caratteri di due rappresentazioni irriducibili V_1 e V_2 di un gruppo finito G, allora abbiamo:*

$$(\phi_1, \phi_2)_G = dim(Hom^G(V_1, V_2))$$

(vedi dimostrazione del teorema 1.2.3).

Quindi è sufficiente dimostrare che

$$dim(Hom^H(W, Res(V))) = dim(Hom^G(Ind(W), V))$$

dove con $Res(V)$ si intende la restrizione della rappresentazione (ρ, V) al sottogruppo H. Questa uguaglianza dice che ogni omomorfismo ψ di H-moduli da W a $Res(V)$ si estende in maniera unica ad un omomorfismo φ

di G-moduli da $Ind(W)$ a V, e questo è vero per la Proprietà Universale del prodotto tensoriale. In effetti, se R è l'insieme dei rappresentanti dei laterali sinistri di H su G, sappiamo che

$$Ind(W) = \bigoplus_{s \in R} sW,$$

per cui possiamo definire φ su ogni addendo della somma diretta nel modo seguente:

$$\varphi(w) := (s^{-1} \circ \psi \circ s)(w) \quad \forall w \in sW.$$

Questa definizione è ben posta perché non dipende dalla scelta dei rappresentanti in R, e d'altra parte vale che φ è unica. □

Il teorema appena dimostrato ha come prima conseguenza il fatto seguente:

Osservazione 3. Consideriamo le mappe

$$Res : \mathbb{C}_{class}(G) \longrightarrow \mathbb{C}_{class}(H)$$

e

$$Ind : \mathbb{C}_{class}(H) \longrightarrow \mathbb{C}_{class}(G).$$

Rispetto al prodotto scalare hermitiano che abbiamo definito sugli spazi vettoriali di arrivo e di partenza, queste due mappe sono l'una l'aggiunta dell'altra.

Inoltre:

Corollario 3.2.3. *Sia (θ, W) una rappresentazione irriducibile di H e (ρ, V) una rappresentazione irriducibile di G, H sottogruppo di G, allora il numero di volte che W compare nella rappresentazione di $Res(V)$ è pari al numero di volte che V compare nella rappresentazione $Ind(W)$.*

Dimostrazione. Per il corollario 1.2.8, il numero di volte che W compare nella rappresentazione di $Res(V)$ si può calcolare come

$$(\chi_{Res(V)}, \chi_W);$$

allo stesso modo il numero di volte che V compare nella rappresentazione $Ind(W)$ si calcola come

$$(\chi_{Ind(W)}, \chi_V).$$

D'altra parte il teorema precedente afferma che

$$(\chi_{Res(V)}, \chi_W) = (\chi_{Ind(W)}, \chi_V),$$

quindi il corollario è dimostrato. □

Riportiamo ora un ultimo risultato sulle rappresentazioni indotte che ci servirà per dimostrare il criterio di Mackey: consideriamo un gruppo finito G e due sottogruppi H e K di G. Sia (θ, W) una rappresentazione di H, e V la rappresentazione indotta, ovvero: $V = Ind_H^G(W)$; vogliamo calcolare

$$Res_K(V)$$

ovvero la restrizione di V su K.
Sia $g \in G$ definiamo il laterale doppio di g rispetto a K e H l'insieme

$$KgH := \{kgh \,/\, k \in K,\, h \in H\}.$$

L'insieme G risulta l'unione disgiunta di tali laterali doppi rispetto K e H, per cui possiamo scegliere un insieme di rappresentanti S per ognuno di questi laterali.

Definizione 3.4. Definiamo per ogni $s \in S$ il sottogruppo di K:

$$H_s := (sHs^{-1}) \cap K$$

e l'applicazione

$$\theta^s(x) := \theta(s^{-1}xs) \quad \forall x \in H_s.$$

Tale applicazione ha come dominio H_s e come dominio $GL(W)$: la coppia (θ^s, W_s), con $W_s = W$, risulta quindi essere una rappresentazione lineare per H_s. In questo modo risulta ben definita anche la rappresentazione

$$Ind_{H_s}^K(W_s).$$

Proposizione 3.2.4. *Sotto queste ipotesi, la rappresentazione*

$$Res_K(Ind_H^G(W))$$

è isomorfa alla seguente somma diretta:

$$\bigoplus_{s\in S} Ind_{H_s}^K(W_s).$$

Dimostrazione. Per ipotesi V è indotta da W, quindi

$$V = \bigoplus_{x\in R} xW$$

dove R è l'insieme dei rappresentanti dei laterali sinistri di H su G. Se definiamo per ogni $s \in S$

$$V_s := \bigoplus_{x\in KsH} xW$$

allora è evidente che

$$V = \bigoplus_{s\in S} V_s.$$

Ognuno di questi sottospazi V_s risulta essere stabile sotto l'azione di K; infatti preso $\tilde{k} \in K$

$$\tilde{k}V_s = \bigoplus_{x\in KsH} \tilde{k}xW = \bigoplus_{k\in K,\, h\in H} \tilde{k}kxhW = \bigoplus_{k'\in K, h\in H} k'xhW = V_s.$$

Vogliamo quindi dimostrare che che le due rappresentazione di K, V_s e $Ind_{H_s}^K(W_s)$, sono K-isomorfe. Abbiamo che

$$V_s = \bigoplus_{x\in KsH} xW = \bigoplus_{x\in KsHs^{-1}} xsW = \bigoplus_{x\in K/H_s} x(sW),$$

e quindi

$$V_s = Ind_{H_s}^K(sW),$$

per cui non ci rimane che dimostrare che sW e W_s sono H_s-isomorfe; è sufficiente considerare l'isomorfismo

$$\begin{aligned} \eta : W_s &\longrightarrow sW \\ w &\longmapsto sw \end{aligned}$$

Questo isomorfismo risulta essere G-lineare, per cui la dimostrazione è conclusa. $\square$

3.3 Criterio di Mackey

Ora applicheremo il risultato precedente nel caso in cui K ed H coincidano. Sia quindi G un gruppo finito, H sottogruppo di G, sia (θ, W) una rappresentazione lineare di H e sia (ρ, V) la rappresentazione di G indotta da W. Come prima indichiamo con

$$H_s := (sHs^{-1}) \cap H$$

e con $Res_s(\theta)$ la restrizione della rappresentazione (θ, W) a H_s.

Proposizione 3.3.1. *(Criterio di Mackey) Affinchè la rappresentazione indotta $V = Ind_H^G(W)$ sia irriducibile è necessario e sufficiente che le seguenti due condizioni siano soddisfatte:*

- ⋆ *W è irriducibile;*
- ⋆ *per ogni $s \in G - H$ le due rappresentazioni di H_s, θ^s e $Res_s(\theta)$, sono disgiunte*[1]*.*

Dimostrazione. Innanzitutto ricordiamo che abbiamo definito θ^s come l'applicazione:

$$\begin{aligned} \theta^s : H_s &\longrightarrow GL(W_s) \\ x &\longmapsto \theta(s^{-1}xs). \end{aligned}$$

Inoltre introduciamo una nuova notazione: date due rappresentazioni V_1 e V_2 di uno stesso gruppo K, indicheremo con

$$(V_1, V_2)_K := dim(Hom^G(V_1, V_2)) = (\chi_{V_1}, \chi_{V_2})_G.$$

[1] Diciamo che due rappresentazioni V_1 e V_2 di uno stesso gruppo K sono disgiunte se non hanno componenti isomorfe nelle rispettive decomposizioni in rappresentazioni irriducibili, o, equivalentemente, se

$$(\chi_{V_1}, \chi_{V_2})_K = 0.$$

Ed ora veniamo alla dimostrazione della proposizione: affinchè V sia irriducibile, è necessario e sufficiente (per il corollario 1.2.7) che

$$(V,V)_G = 1,$$

il che equivale a dire, per la formula di reciprocità di Frobenius, che

$$(V,V)_G = (Ind_H^G(W), V)_G = (W, Res_H(V))_H = 1.$$

D'altra parte, per la proposizione precedente vale:

$$Res_H(V) = Res_H(Ind_H^G(W)) = \bigoplus_{s\in S} Ind_{H_s}^H(W_s)$$

dove S rappresenta l'insieme dei rappresentanti dei laterali doppi HsH, al variare di $s \in G$. Applicando ulteriormente la formula di Frobenius si ottiene

$$(V,V)_G = (W, \bigoplus_{s\in S} Ind_{H_s}^H(W_s))_H = \sum_{s\in S}(Res_{H_s}(W), W_s)_{H_s} = \sum_{s\in S}(Res_s(\theta), \theta^s)_{H_s}.$$

Supponiamo ora $s = 1$, allora il primo membro della sommatoria sarà

$$(\theta,\theta) \geqslant 1;$$

per fare in modo che $(V,V)_G$ sia esattamente pari a 1 è necessario e sufficiente che $(\theta,\theta) = 1$ e che gli altri membri della sommatoria siano pari a 0: queste due richieste corrisponodono esattamente ai due punti dell'enunciato della proposizione. □

Il criterio di Mackey utilizza quindi fortemente la formula di reciprocità di Frobenius per ottenere un risultato importante: *l'irriducibilità della rappresentazione di partenza è necessaria affinchè la rappresentazione indotta sia irriducibile;* d'altra parte, però, questa condizione non è sufficiente a garantire l'irriducibilità della stessa rappresentazione indotta.
Vediamo ora un breve corollario che si concentra su un caso particolare di sottogruppo di G, il caso in cui H è normale.

Corollario 3.3.2. *Sia H sottogruppo normale di un gruppo finito G, e sia (θ, W) una rappresentazione irriducibile di H; allora affinchè $Ind_H^G(W)$ sia irriducibile, è necessario e sufficiente che (θ, W) non sia isomorfa ad alcuna rappresentazione (θ^s, W_s) per ogni $s \notin H$.*

Dimostrazione. È sufficiente osservare che se H è un sottogruppo normale di G, allora vale per ogni $s \in G$ che

$$H_s = sHs^{-1} = H$$

e

$$Res_s(\theta) = \theta.$$

□

Bibliografia

[1] Fulton, W., Harris, J. (1991), *"Representation Theory. A First Course"*, Springer-Verlag.

[2] Sagan, B. E. (2001), *"The Symmetric Group. Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Function."*, Springer.

[3] Serre, J. -P. (1977), *"Linear Representations of Finite Groups"*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin.

Ringraziamenti:

$\star$ Vorrei ringraziare innanzitutto il mio relatore, prof. *Luca Migliorini*, per avermi seguito nel lavoro della tesi. Sono rimasta colpita dalla sua capacità di spiegare in modo chiaro e appassionato gli argomenti trattati a lezione e dalla sua abilità nel far comprendere a noi studenti anche le questioni più complesse. È stato lui a propormi i contenuti trattati in questa tesi, e sono contenta dello studio che ho fatto. Inoltre vorrei ringraziarlo per avermi guidato nella scelta di un possibile Dottorato e per come si è reso disponibile nei miei confronti.

$\star$ Infine vorrei approfittare di queste poche righe per ringraziare tutti i professori che in questi cinque anni di studio universitario hanno contribuito alla mia formazione, sia dal punto di vista matematico che umano. In particolare ringrazio la prof.ssa *Morigi* che mi ha accompagnato nell'elaborazione della tesi triennale, il prof. *Lanconelli* e la prof.ssa *Manaresi* per quello che mi hanno insegnato e per il lavoro svolto in questi anni in CdL, il prof. *Ferri*, la prof.ssa *Cagliari* e la dottoressa *Alessia Cattabriga* per la continua disponibilità nei miei confronti e la pazienza che hanno avuto con me.